Origines du Paradoxe de Langevin

Universit Paris Diderot, 16-17 Juin 2011

Thierry GRANDOU
Institut Non Linéaire de Nice Sophia Antipolis, UMR- CNRS 6618

Origines..

A - ‘Raisons’ à l’origine d’un ‘paradoxe’

B - Requalification du ‘paradoxe’ (on conserve la terminologie!) :

Les durées dépendent des lignes d’univers suivies.

‘Géométriser, c’est comprendre.’ (R. Thom) .. !?

L'une des controverses les plus vives du XXième siècle .. (W. Unruh, 1981)

- Sur laquelle A. Einstein lui-même, en 1917, s'est beaucoup fourvoyé .. (C.S. Unnikrishnan, 2005)

- Que la pure spéculation, seule, n'a pas résolue.. (H. Bergson, H. Dingle, 1956, J. Levy, 1996)

Recherche 'du principe' à l'origine de ce phénomène

-Surtout pas en R.G. !

- Mais dans la situation la plus simple où le phénomène est avéré !

A - Les raisons d'un paradoxe

La réciprocité!

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{(\pm v)^2}{c^2}}$$

Conceptuellement et expérimentalement, cette symétrie n'est pas tenable.. si 'réelle'.

Mais comment expliquer une asymétrie?

- Les règles et horloges identiques dans tous les repères (A. Einstein 1905)
- Les discussions d'alors: à 1+1 dimensions d'espace-temps

De sorte que physiciens et philosophes pensent les effets relativistes en terme d'apparences/parallaxes

A - Et ils n'ont pas tort...

Les 'apparences' ou plus précisément, les effets de parallaxe relativistes sont à la fois symétriques et réels..

.. tout comme leurs homologues de géométrie euclidienne à 3 dimensions ..

Mais n'ont pas le caractère d'invariant (ou 'propre').

A - Un exemple bien connu

Les mésons π ont une durée de vie moyenne de 10^{-8} sec. Mais à $v \simeq c$, ils voyagent $\sim 300m$ (correspondant à $\sim$ 100 fois leur durée de vie moyenne).

Un effet mesurable, donc réel, persistant et exploitable.

Mais jamais que la mesure réelle d'un réel effet de parallaxe

La mesure invariante de durée de vie, elle, est la même dans tous les repères d'inertie.

Ni intenable symétrie, ni incompréhensible antisymétrie, ni paradoxe ici.

A - Quelquechose de comparable (1926)

En théorie relativiste les coordonnées d'espace et de temps 'jouent des roles symétriques'

$$x' = \gamma(x - vt)\ , \quad y' = y\ , \quad z' = z\ , \quad ct' = \gamma(ct - \frac{vx}{c})$$

Alors .. existerait-il quelqu'équivalent 'spatial' de ce qui se passe avec le temps?

A - Quelquechose de comparable (1926)

A 1 dimension spatiale de plus (2 au lieu de 1), soient 2 boosts successifs, $K_0 \longrightarrow K(\vec{v}) \longrightarrow K'(\vec{v}')$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ non colinéaires. Exemple $\vec{v}//\vec{O}x$ de K_0, et $\vec{v}'//\vec{O}y$ de $K(\vec{v})$. La vitesse relative K_0-vs- $K'(\vec{v}')$, exprimée dans K_0 et dans $K'(\vec{v}')$ pointent en des directions différentes..

$$\mathrm{d}\theta = \frac{|\mathrm{d}\vec{v}_{Oy}|}{|\vec{v}_{Ox}|}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_{Ox}^2}{c^2}}\right)$$

Depuis K_0, $K'(\vec{v}')$ n'est pas vu de la même façon (bien qu'opposée) que $K'(\vec{v}')$ depuis K_0 .. ses axes spatiaux ont tourné!

Ce sont les rotations de Thomas-Wigner

B - Requalification du ‘paradoxe’ ..

$\mathrm{d}\tau$, est un invariant différentiel ($\mathrm{d}\theta$, itou). L’intégration de $\mathrm{d}\tau$ le long d’une ligne d’univers ‘de genre temps’ définit le temps propre écoulé le long de cette ligne, grâce au stratagème

A.EINSTEIN, A. SCHILD : “ *..imagining an infinity of inertial reference frames, moving uniformly relative to the laboratory frame, one of which instantaneously matching the velocity of the considered system, a twin, a clock,.."*

$$\Delta(\mathcal{C};\mathcal{R}) = \int \mathrm{d}\tau_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}(p)\ , \quad \forall p \in \mathcal{C}$$

$$c^2\mathrm{d}\tau^2(\mathrm{p}) = c^2\mathrm{dt}^2_{\mathcal{R}}(\mathrm{p}) - \mathrm{dx}^2_{\mathcal{R}}(\mathrm{p}) - \mathrm{dy}^2_{\mathcal{R}}(\mathrm{p}) - \mathrm{dz}^2_{\mathcal{R}}(\mathrm{p})$$

B - Requalification du ‘paradoxe’

$\Delta(\mathcal{C};\mathcal{R})$ est mathématiquement bien définie pour toute ligne d’univers continue de genre temps, $\mathcal{C}$, et toute variété d’espace-temps, $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{C}'$ une seconde ligne d’univers de genre temps ayant 2 points A et B en commun avec $\mathcal{C}$. Alors,

$$\Delta(\mathcal{C},\mathcal{C}';A,B) = \int_A^B \mathrm{d}\tau_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}(p) - \int_A^B \mathrm{d}\tau_{\mathcal{C}'/\mathcal{R}}(p') \equiv \delta T$$

Ceci est un invariant, et il est non ‘paradoxal’, car non pas symétrique, mais antisymétrique

$$\Delta(\mathcal{C},\mathcal{C}';A,B) = -\Delta(\mathcal{C}',\mathcal{C};A,B)$$

Petite digression sur ‘Géométriser, c’est comprendre’ ..

Mais oui! La R.R. =$(\mathcal{M}, g, I^+, \varepsilon)$. Or, $g = diag(1, -1, -1, -1)$. La familière inégalité triangulaire de l’espace euclidien tri-dimensionnel $g = diag(1, 1, 1)$

$$d(O, A) \leq d(O, B) + d(B, A)$$

se trouve inversée en R.R.

$$d(O, A) \geq d(O, B) + d(B, A)$$

‘Comme’ g restreinte aux lignes d’univers de genre temps, mesure le temps propre écoulé le long de ces lignes, le paradoxe requalifié se trouve expliqué .. *end of proof*.

Voyageur de Langevin en mouvement uniformément accéléré ($1g$)

temps propre voyageur τ (années)	temps propre Terre t (années)
1	1 and 4 days
2	2 and 1 month
4	4.7
8	14.5
12	40.1
16	104
20	297
28	2200
40	44000
48	326000
86	5×10^9

From J. Bros, CEA Saclay, 2005.

La formule correspondante..

$$t = \frac{4c}{\gamma} sh\left(\frac{\gamma}{4c}\tau\right)$$

Et une remarque (très) significative:

'Ne pas en déduire que cela est du à l'accélération (γ), mais à la géométrie de l'espace-temps' .. !

end of digression.

B - Synthèse géométrique

La géométrie différentielle permet un traitement puissamment synthétique et rigoureux des théories de la relativité .. mais elle n'est pas 'neutre' au plan métaphysique, ni universelle en physique!

Le paradoxe des jumeaux de Langevin requalifié en dépendance des durées de temps propre écoulé le long des lignes d'univers de genre temps, voyons comment et pourquoi $\delta T \neq 0$,

$$\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; A, B) = \int_A^B \mathrm{d}\tau_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}(p) - \int_A^B \mathrm{d}\tau_{\mathcal{C}'/\mathcal{R}}(p') \equiv \delta T$$

Résultats

Espace-temps de reference: $\mathcal{M}$, l'espace-temps du sédentaire, de 'résolution/projection en espace et en temps' selon $\dot{r}(s_i)$.
L'histoire du voyageur: l'application de classe $\mathcal{C}^{2(4)}$,

$$r : [s_i, s_f] \longrightarrow \mathcal{M}$$

On construit à partir de r uniquement, une série d'automorphismes causaux $\varphi_{s,s_i} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$,

$$\varphi_{s,s_i}(p) = r(s) + \boldsymbol{B}(\dot{\mathbf{r}}(s_i), \dot{\mathbf{r}}(s)) \circ \boldsymbol{L}_{s,s_i}(p - r(s_i))$$

où L_{s,s_i} est (l'intégration de) l'opérateur de Fermi-Walker

$$L_{s,s_i} = T\exp \int_{s_i}^{s} \mathrm{d}s' \ \dot{r}(s') \wedge \ddot{r}(s')$$

Et cette série contient tout..

▷ Par construction, la ligne d'univers continue de genre temps elle-même:

$$\{\varphi_{s,s_i}(r(s_i)) \,/\, s \in [s_i, s_f]\} = \{r(s)/\, s \in [s_i, s_f]\} = \mathcal{C}$$

Ainsi que toutes les propriétés locales (différentielles) et globales (intégrées) du voyage:

▷ Les rotations de Thomas-Wigner des gyrovecteurs $\mathbf{e_j}(s)$ par rapport aux axes de $\mathcal{M}$, les $\mathbf{e_j}(s_i)$, leur vitesse de rotation instantanée, $\omega_{Th}(r(s)) = d\theta(r(s))/d\tau(r(s))$

▷ La relation instantanée du $\mathcal{M}_{\dot{r}(s_i)}$-temps au $\mathcal{M}_{\dot{r}(s)}$-temps

$$\mathrm{d}s = \dot{\mathbf{r}}(s_i) \cdot \varphi_{s,s_{i*}}(\dot{\mathbf{r}}(s_i))\ \mathrm{d}t$$

.. tout..

▷ Le différentiel non-trivial ($\delta T \neq 0$) de temps propre écoulé,

$$\int_{s_i}^{s_f} \mathrm{d}t := t_f - t_i = \int_{s_i}^{s_f} \mathrm{d}s \, \left(\dot{\mathbf{r}}(s_i) \cdot \varphi_{s,s_{i*}}(\dot{\mathbf{r}}(s_i))\right) \geq s_f - s_i$$

Plus familier sous la forme

$$\left(\dot{\mathbf{r}}(s_i) \cdot \varphi_{s,s_{i*}}(\dot{\mathbf{r}}(s_i))\right) = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2(s)/c^2} \geq 1$$

Mais pas du tout nécessaire, car pure conséquence du seul principe de causalité attaché à l'existence d'une vitesse limite, et réalisé comme forme quadratique lorentzienne $g = diag(1, -1, -1, -1)$ sur $\mathcal{M}$.

.. en effet..

Le vecteur $\dot{\mathbf{r}}(s_i)$ est de genre temps: $\dot{\mathbf{r}}^2(s_i) = 1$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée

$$\forall \mathbf{v} \in M\,, \qquad \dot{\mathbf{r}}^2(s_i)\,\mathbf{v}^2 \;\leq\; (\dot{\mathbf{r}}(s_i)\cdot\mathbf{v})^2$$

appliquée à $\mathbf{v} := \varphi_{s,s_{i*}}(\dot{\mathbf{r}}(s_i))$ donne bien

$$\left(\dot{\mathbf{r}}(s_i)\cdot\varphi_{s,s_{i*}}(\dot{\mathbf{r}}(s_i))\right) \geq 1$$

puisque (Théorème Zeeman), $\varphi_{s,s_{i*}} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, et que donc $\varphi_{s,s_{i*}}(\dot{\mathbf{r}}(s_i))^2 = 1$.

end of proof

A la base de ce traitement ..

2 aspects essentiels:

I) Comment comparer entre eux les différents espaces tangents à la variété $\mathcal{M}$ en chacun de ses points ? C'est à dire les espaces vectoriels $M_{\mathbf{u}}$, en chaque point $P = r(s)$ et pour chaque $\mathbf{u} = \dot{r}(s)$.

$$M_{\mathbf{u}'} \xleftarrow{B(\mathbf{u}',\mathbf{u})} M_{\mathbf{u}}$$

avec l'isomorphisme

$$B(\mathbf{u}',\mathbf{u}) = 1 - \frac{(\mathbf{u}'+\mathbf{u}) \otimes (\mathbf{u}'+\mathbf{u})}{1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}} + 2\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}$$

où,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u} \ : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{u}'(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})$$

Propriétés

-$B(\mathbf{u}',\mathbf{u})$ préserve $(\mathcal{M},g,I^+,\varepsilon)$, et

$$B(\mathbf{u}',\mathbf{u})\mathbf{u}=\mathbf{u}',\quad B(\mathbf{u}',\mathbf{u})\circ B(\mathbf{u},\mathbf{u}')=I$$

- permet de définir une notion d'‘égalité physique’ de vecteurs appartenant a différents espaces:

Reflexive mais pas transitive ($d\tau, d\theta$ non-exactes)

- La composition de 3 boosts sans rotation .. est une rotation sans boost

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}'')\circ B(\mathbf{u}'',\mathbf{u}')\circ B(\mathbf{u}',\mathbf{u})=R_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')$$

Si

$$\mathbf{u},\ \mathbf{u}',\ \mathbf{u}''\ \longmapsto\ \vec{v}_{Ox},\ d\vec{v}_{Oy}$$

Alors .. Thomas-Wigner

$$R_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')\longmapsto\frac{|\mathrm{d}\vec{v}_{Oy}|}{|\vec{v}_{Ox}|}\left(1-\sqrt{1-\frac{\vec{v}_{Ox}^2}{c^2}}\right)$$

Petite fiction: Si $\boldsymbol{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}'')$ était transitive ..

On aurait

$$\Delta T = \dot{r}(s_i) \cdot \boldsymbol{B}(\dot{r}(s_i), \dot{r}(s_f))\dot{r}(s_i)\ \Delta S$$

et donc $\Delta T \geq \Delta S$ par Cauchy-Schwartz inversée.

Comme

$$\boldsymbol{B}(\dot{r}(s_f), \dot{r}(s_i)) = \boldsymbol{B}(\dot{r}(s_i), \dot{r}(s_f))^{-1}$$

possède les mêmes propriétés que $\boldsymbol{B}(\dot{r}(s_i), \dot{r}(s_f))$, on déduirait aussi que $\Delta S \geq \Delta T$!

Retour au cas symétrique intenable

Mais l'essentiel..

est que la construction de cette correspondance entre espaces vectoriels tangents de '*résolution en espace et en temps*' différentes repose sur

La convention de synchronisation d'Einstein-Poincaré

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

Là ou rien *a priori* n'interdit d'écrire (H. Reichenbach)

$$t = (1 - \varepsilon)t_1 + \varepsilon t_2$$

pour $\varepsilon \in]0, 1[$. Mais $\varepsilon = \frac{1}{2}$ garde un rapport direct avec l'objet géométrique fondamental de $(\mathcal{M}, g, I^+, \varepsilon)$ qui est (g) !

Le second aspect essentiel..

II) Le théorème de E.C. Zeeman (1963). Soit sur $\mathcal{M}$ la relation d'ordre partiel

$$\forall x, y \in \mathcal{M}\ , \quad x < y \Longleftrightarrow (y_0 - x_0)^2 - (\vec{y} - \vec{x})^2 \geq 0\ ,\ \&\ \ y_0 - x_0 > 0$$

Soit f une application inversible de l'espace $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ pas nécessairement linéaire ni continue !

$$\forall x, y \in M\ , \quad x < y \Longrightarrow \quad f(x) < f(y) \quad \& \quad f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

L'ensemble des *automorphismes causaux*, f, forme $\mathcal{G}$, le *le groupe de Causalité* de $\mathcal{M}$

Théorème A 3 dimensions d'espace, $\mathcal{G}$=$\mathcal{L}_+^\uparrow$ inhomogène, plus les dilatations.